Mit Pfeil und Bogen

Teil A: Über die Zufälligkeiten beim Bogenschießen

Volker Jentsch
http://volkerjentsch.de

August 2022

Eine der brennenden Fragen, die Bogenschützen, männlich wie weiblich, umtreibt, ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Pfeile das Ziel treffen. Wie lässt sich diese bestimmen?

Das Ziel sei die offizielle $d_0 = 40\,cm$ Scheibe der *World archery*. Diese enthält elf konzentrische Ringe und in der Mitte ein Kreuz (siehe Abb. 2). Ich nehme an, dass das Bogenschießen aus einem systematischen und einem probabilistischen Anteil besteht. Der systematische beruht auf Können – der Pfeil geübter Schützen trifft die Scheibe aus etwa $20\,m$ innerhalb eines Kreises mit einem Durchmesser $d \approx 10\,cm$. Die exakte Lage des Pfeils innerhalb dieses Kreises wird durch nicht kontrollierbare Einflüsse, wie unabsichtliche, kleine Schwankungen von Hand und Arm sowie Zielansprache des Schützen bestimmt. Dieser Anteil des Bogenschusses wird folglich als Zufallsexperiment interpretiert, dessen Ergebnisse gleich wahrscheinlich und unabhängig voneinander sind.

Die Frage ist nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Pfeil in einem Kreis mit Durchmesser $d = d_m, d_m < d_0$ eintrifft. Dieses Problem lässt sich mit Hilfe der geometrischen Wahrscheinlichkeit lösen. Man vergleicht nicht, wie damals Laplace, die *Anzahl* der günstigen mit den möglichen *Ereignissen*, sondern die günstigen mit den möglichen *Flächen* (oder *Volumen*).[1] Sie lässt sich – analog zum Wahrscheinlichkeitsbegriff von Laplace – durch den Quotient aus kleiner Kreisfläche (das gewünschten Ereignisse) und großer Kreisfläche (die möglichen Ereignisse) errechnen:

$$p = \pi(d_m/2)^2/\pi(d_0/2)^2 \tag{1}$$

Dieses (überraschend) einfache Ergebnis soll auf herkömmliche Weise mittels der wiederholten Abfolge von Bogenschüssen getestet werden. Lassen wir den Pfeil N mal fliegen. Davon wird ein Bruchteil n im Zielgebiet landen. N und n werden an Hand eines Zufallsgenerators ermittelt.[2] Es sei $d_0 = 32\,cm$ der äußere Kreis, der $(N-n)$-mal den Pfeil fängt und $d_m = 8\,cm$ das Ziel (der

[1] Auf diese mir bis dato unbekannte Betrachtung bin ich mit Hilfe der bemerkenswerten Internetseite *www.lerninhalten.de schülerlexikon* gestoßen.

[2] Der Zufallsgenerator erzeugt Zahlen von 0 bis 1, die idealerweise gleich verteilt sind.

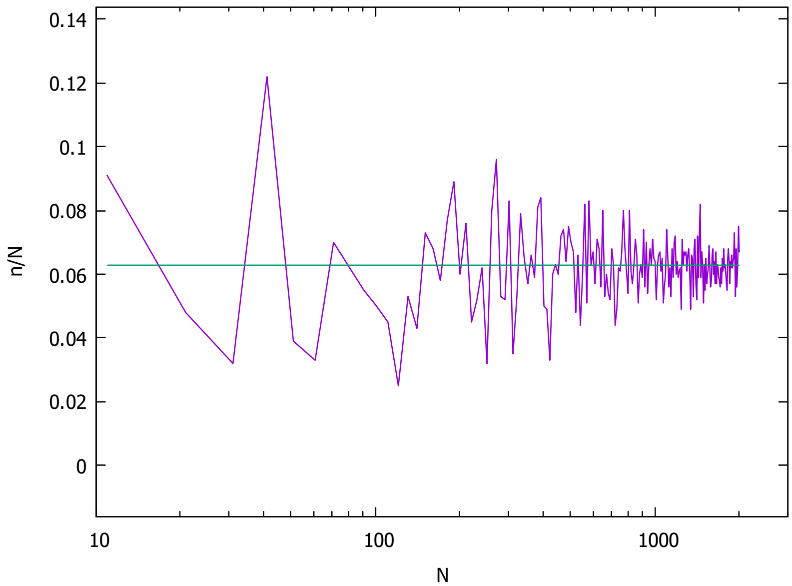

Abbildung 1: Anteil der Treffer n in einer Folge von N Versuchen

innere Kreis), das n-mal getroffen wird. In Anwendung von (1) müsste sich eine Treffer-Wahrscheinlichkeit von $p = 1/16$ ergeben. Das ist in Abb. 1 die Gerade. Die um diese Gerade fluktuierende Kurve ist n/N als Funktion von N. Schön zu sehen, wie mit zunehmendem N die Abweichungen $D = n/N$ kleiner werden: $D \approx \pm 1/2\sqrt{N}$ – das Gesetz der großen Zahl.
Eine Wiederholung des Versuchs würde eine andere Kurve ergeben; gleichwohl würde auch diese mit zunehmendem N um $p = 1/16$ fluktuieren. Der Vorteil von (1) liegt auf der Hand – die geometrische Wahrscheinlichkeit erspart tausend Pfeilschüsse! Übrigens gibt es Abb.1 auch animiert – besuchen Sie:
`http://volkerjentsch.de/Bogen_1.html` .

Im Besitz der Trefferwahrscheinlichkeit p lässt sich nun auch das Problem lösen, das mit „Warten auf den ersten Treffer“ beschrieben wird. Es sei P die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Treffer im $(k+1)$-ten Versuch erfolgt. Das führt auf:

$$P(k) = p(1-p)^k \tag{2}$$

Aus (2) folgt, dass mit zunehmender Anzahl der Versuche die Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu setzen, abnimmt. Praktisch relevanter sind jedoch Erwartungswert E und Standardabweichung σ. E gibt die Anzahl der Versuche an, die im *Mittel*, also auf lange Sicht, erforderlich sind, bis der erste Treffer im $(k+1)$-ten Versuch gelingt[3]:

[3] siehe z.B. N.Henze, Stochastik für Einsteiger, Springer, 2016, S.187

$$E(k) = 1/p - 1 \tag{3}$$

mit Standardabweichung σ:

$$\sigma(k) = \pm\sqrt{(1-p)/p^2} \tag{4}$$

Mithin nehmen Erwartungswert und Standardabweichung, also die durchschnittliche Anzahl k der „Nieten“, bei abnehmender Trefferwahrscheinlichkeit zu. Eine Tatsache, die zum Erfahrungsschatz der Bogenschützen gehört. Für kleine p, ist $|\sigma| \approx E$, was die Aussagekraft des Zahlenwerks für praktische Zwecke merklich limitiert.

Im Folgenden gebe ich ein paar Beispiele, in denen die obigen Überlegungen hilfreich sein sollten.

Beispiel 1: Bogenschütze Helmut ist ein recht geübter Schütze; es gelingt ihm, aus $20\,m$ Entfernung alle Schüsse (sofern es nicht zu viele sind, so dass eventuelle Ermüdungseffekte ausbleiben) in einem Durchmesser von $d_0 = 32\,cm$ auf der Scheibe unterzubringen. Dieser entspricht dem äußeren schwarzen Ring in Abb. 2.
Für den inneren Ring wird die maximale Breite des gelben Bereichs angenommen; diese ist auf der $40\,cm$ Scheibe etwa $d_m = 8\,cm$. Somit ergibt sich gemäß (1) die eher bescheidene Wahrscheinlichkeit von $p = 1/16$, oder anders ausgedrückt, eine Chance von 1 : 15, die „Mitte“ zu treffen. Folglich ist zu erwarten, dass Helmut 15 ± 15 Versuche benötigt, bis ihm beim sechzehnten der erste Treffer gelingt. Möglich ist allerdings alles; angesichts der großen Streuung kann er schon im ersten Schuss treffen oder erst nach dem dreißigsten (oder gar nicht treffen, wenn ihn die Kräfte oder die Wahrscheinlichkeiten im Stich lassen).

Beispiel 2: Bogenschützin Christina ist geschickter im Umgang mit dem Bogen. Sie übt allerdings schon seit zehn Jahren, im Gegensatz zu Helmut, der erst seit fünf Jahren dabei ist. Sie schießt mit Helmuts Bogen, ebenfalls aus $20\,m$ Entfernung. Bei ihr liegen alle Schüsse mit Sicherheit in einem Kreis von $d_0 = 20\,cm$, das entspricht der Breite des inneren blauen Rings in Abb.2. Das Ziel sei weiterhin mit $d_m = 8\,cm$ definiert. Gemäß (1) liegt die Wahrscheinlichkeit jetzt bei 16%, die Mitte zu treffen, oder anders ausgedrückt, Christina hat eine Chance von 1 : 5, das Ziel zu treffen, oder braucht 6 ± 5 Schüsse, bis sie das erste Mal trifft.

Beispiel 3: Christina geht jetzt auf die doppelte Distanz, also $40\,m$ Entfernung. Jetzt trifft sie mit Sicherheit eine Scheibe, deren Breite $d_0 = 40\,cm$ misst. Wie groß darf das Ziel sein, damit sie die gleiche Trefferwahrscheinlichkeit wie im Beispiel 2 erreicht? Ihre Vermutung: doppelte Entfernung, also doppelte Größe des Ziels. Richtig vermutet! Das Ziel würde in diesem Fall $d_m = 16\,cm$ breit sein, da das Verhältnis der jeweiligen Flächen zueinander gleich bleiben soll. Die Ausdehnung des neu definierten Ziels überdeckt dann den roten Bereich der

Abbildung 2: Zielscheibe mit 40 cm Durchmesser

Zielscheibe aus Abb.2.

Fazit: Wer all das im Gelände ausprobieren will, sollte die im Text genannten Voraussetzungen beachten. Vor allem muss sicher gestellt sein, dass (bis auf wenige Ausreißer) alle Pfeile im Kreis mit Durchmesser d_0 landen, dessen Größe, je nach Vermögen, frei vereinbar ist, ebenso wie das Ziel, das der Bedingung $d_m/d_0 < 1$ genügen muss. Um Enttäuschungen zu vermeiden, wird empfohlen, die Trefferwahrscheinlichkeit eher größer anzusetzen, etwa $d_m/d_0 \approx 0.5$, was entsprechende Anpassungen der Entfernung sowie des inneren und äußeren Kreises verlangen.[4].

[4]Ich schieße mit einem blanken Bogen *Black Wolf* von *W&W* mit $36 - 40\,lbs$ Zugstärke. Erfreuen Sie sich an meinem Video *Bogenschützin trifft Bogenschützen* – `https://youtu.be/c4P3m4X-DHM`